CORSO SPERIMENTALE

**Indirizzo:** PIANO INTERNAZIONALE INFORMATICA

**Tema di:** MATEMATICA

## QUESTIONARIO

1. Siano dati un cono equilatero e la sfera in esso inscritta. Si scelga a caso un punto all'interno del cono. Si determini la probabilità che tale punto risulti esterno alla sfera.
2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $sen\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
3. Un solido ha per base un cerchio di raggio 1. Ogni sezione del solido ottenuta con un piano perpendicolare ad un prefissato diametro è un triangolo equilatero. Si calcoli il volume del solido.
4. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è: $\lim_{x\mapsto+\infty}\frac{x^{2008}}{2^x}=0$
5. Nel piano riferito a coordinate cartesiane (x, y) si dica qual è l'insieme dei punti per i quali risulta: $y^2-x^3>0$
6. I lati di un parallelepipedo rettangolo misurano 8, 9 e 12 cm. Si calcoli, in gradi e primi sessagesimali, l'ampiezza dell'angolo che la diagonale mandata da un vertice fa con ciascuno dei tre spigoli concorrenti al vertice.
7. Perché è *geometria "non" euclidea*? Che cosa e come viene negato della geometria euclidea? Si illustri la questione con gli esempi che si ritengono più adeguati.
8. Sia $f$ la funzione definita da $f(x)=\pi^x-x^\pi$. Si precisi il dominio di $f$ e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x=\pi$.
9. In una classe composta da 12 maschi e 8 femmine, viene scelto a caso un gruppo di 8 studenti. Qual è la probabilità che, in tale gruppo, vi siano esattamente 4 studentesse?
10. Qual è l'equazione della curva simmetrica rispetto all'origine di $y=e^{-2x}$ ? Quale quella della curva simmetrica rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante?

---

Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

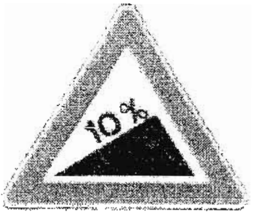
CORSO DI ORDINAMENTO

**Indirizzo:** SCIENTIFICO

**Tema di:** MATEMATICA

## QUESTIONARIO

1. Si consideri la seguente proposizione: " Se due solidi hanno uguale volume, allora, tagliati da un fascio di piani paralleli, intercettano su di essi sezioni di uguale area". Si dica se essa è vera o falsa e si motivi esaurientemente la risposta.
2. Ricordando che il lato del decagono regolare inscritto in un cerchio è sezione aurea del raggio, si provi che $sen\frac{\pi}{10}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$
3. Fra le casseruole, di forma cilindrica, aventi la stessa superficie S (quella laterale più il fondo) qual è quella di volume massimo?
4. Si esponga la regola del marchese *de L'Hôpital* (1661 – 1704) e la si applichi per dimostrare che è: $\lim_{x \mapsto -\infty} \frac{x^{2008}}{2^x}=0$
5. Si determini un polinomio *P(x)* di terzo grado tale che:
$$P(0)=P'(0)=0\,,\ P(1)=0 \ \text{ e } \int_0^1 P(x)dx=\frac{1}{12}$$
6. Se $\binom{n}{1}, \binom{n}{2}, \binom{n}{3}$ con $n>3$ sono in progressione aritmetica, qual è il valore di $n$?
7. Si determini, al variare di k, il numero delle soluzioni reali dell'equazione:
$$x^3-3x^2+k=0.$$
8. Sia $f$ la funzione definita da $f(x)=\pi^x - x^\pi$. Si precisi il dominio di $f$ e si stabilisca il segno delle sue derivate, prima e seconda, nel punto $x=\pi$.
9. Sia $f(x)=\frac{x^2-1}{|x-1|}$; esiste $\lim_{x \mapsto 1} f(x)$ ? Si giustifichi la risposta.
10. Secondo il codice della strada il segnale di "salita ripida" (fig. a lato) preavverte di un tratto di strada con pendenza tale da costituire pericolo. La pendenza vi è espressa in percentuale e nell'esempio è 10%. Se si sta realizzando una strada rettilinea che, con un percorso di 1,2 km, supera un dislivello di 85 m, qual è la sua inclinazione (in gradi sessagesimali)? Quale la percentuale da riportare sul segnale?




Durata massima della prova: 6 ore.
È consentito soltanto l'uso di calcolatrici non programmabili.
Non è consentito lasciare l'Istituto prima che siano trascorse 3 ore dalla dettatura del tema.

**SOLUZIONE DEI QUESITI DI ANALISI DEI QUESTIONARI PER IL LICEO SCIENTIFICO SPERIMENTALE E TRADIZIONALE ( ESME DI STATO 2008)**

SPERIMENTALE

Quesito 4

Dimostriamo che per qualsiasi n si ha $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{2^x}=0$. Facciamolo per induzione .

Per n=1 $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\ln 2\cdot 2^x}=0$ .

Facciamo ora vedere che $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{n-1}}{2^x}=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{2^x}=0$ . Infatti $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{2^x}=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^{n-1}}{2^{\frac{x}{2}}}\cdot\frac{x}{2^{\frac{x}{2}}}\right)=$

$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{2^{\frac{x}{2}}}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{x^{n-1}}{2^{\frac{x}{2}}}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{2}}{2^{\frac{x}{2}}}\cdot 2^{n-1}\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x}{2}\right)^{n-1}}{2^{\frac{x}{2}}}=2^n\cdot 0\cdot 0=0$ q.e.d.

Quesito 8

D=$R^+$( reali non negativi ) ( è $x^\pi$ che non può essere calcolato per gli x negativi )

$f'(x)=\pi^x\ln\pi-\pi x^{\pi-1}$ ; $f'(\pi)=\pi^\pi\ln\pi-\pi^\pi=\pi^\pi(\ln\pi-1)>0$ ( ciò in quanto i due fattori sono entrambi positivi ; il secondo lo è in quanto $\pi > e$ )

$f''(x)=\pi^x\ln^2\pi-\pi(\pi-1)x^{\pi-2}$ ; $f''(\pi)=\pi^\pi\ln^2\pi-(\pi-1)\pi^{\pi-1}=\pi^{\pi-1}(\pi\ln^2\pi-\pi+1)>0$ ( entrambi i fattori sono positivi ) .

Quesito 10

La simmetria rispetto all'origine ha equazione $\begin{cases}x'=-x\\ y'=-y\end{cases}$ . Sotto questa trasformazione l'equazione

$y=e^{-2x}$ diventa $-y=e^{2x}\Rightarrow y=-e^{2x}$

TRADIZIONALE

Quesito 5

$P(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ; $P'(x)=3ax^2+2bx+c$ ; P'(0)= c = 0 ; P(1) = a+b+d = 0 $\Rightarrow b=-a-d$

$\int_0^1\left(ax^3-(a+d)x^2+d\right)dx=\frac{1}{12}$ ;$\left[\frac{ax^4}{4}-\frac{(a+d)x^3}{3}+dx\right]_0^1=\frac{1}{12}$ . Ponendo , ad esempio, d=0 ,si ha a=-1 , quindi $P(x) = -x^3 + x^2$

Quesito 9

$\lim_{x\to1} \frac{x^2-1}{|x-1|} = \lim_{x\to1} \left[ \frac{x-1}{|x-1|} \cdot (x+1) \right]$ ; quindi $\lim_{x\to1^+} f(x) = 2$ ; $\lim_{x\to1^-} f(x) = -2$ . La funzione non ha limite in 1 perché limite destro e limite sinistro sono diversi .