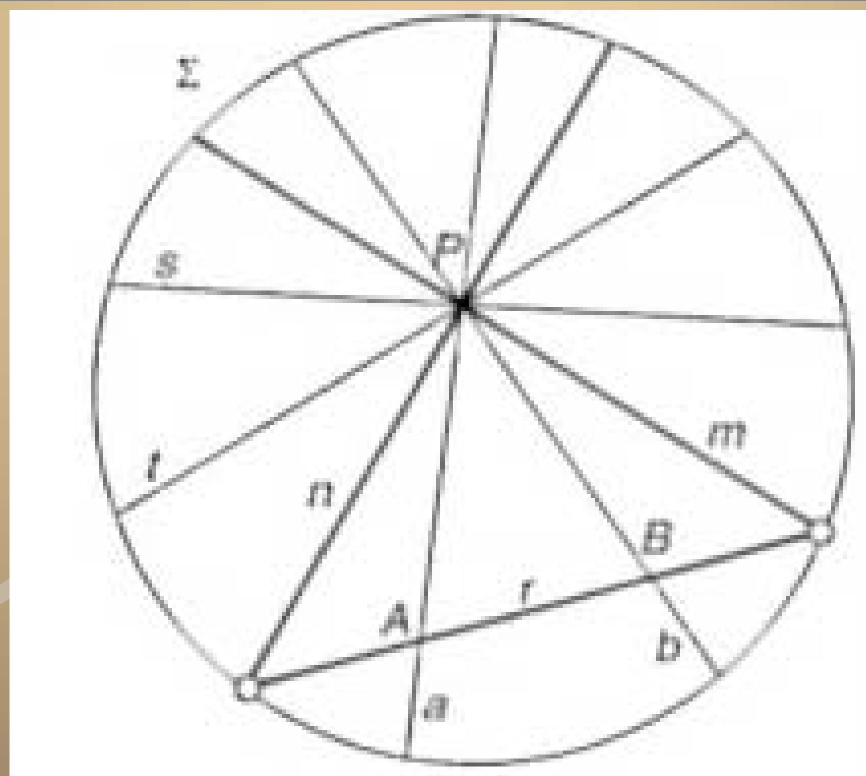
LA COERENZA DELLA GEOMETRIA IPERBOLICA

- Chi ci assicura che , andando avanti nella deduzione sulla base degli *assiomi della geometria assoluta più l'ipotesi dell'angolo acuto ,* non ci si imbatta in una contraddizione ?
- In altre parole , chi ci garantisce della *coerenza della geometria iperbolica* ?
- In teoria –missione impossibile- dovremmo dedurre tutte le proposizioni ammissibili in quella geometria
- Storicamente , all'inizio del Novecento , si è percorsa la strada della costruzione di modelli della geometria iperbolica : in particolare il *modello di Klein* e il *modello di Poincaré*
- *Il fatto che una teoria possa avere una* *interpretazione* in un *modello* ha fondamento logico nella distinzione tra *sintassi* e *semantica* in un *sistema formale*
- Illustreremo in particolare il *modello di Klein*

IL MODELLO DI KLEIN

- Il modello di Klein è un modello euclideo della geometria iperbolica : l’Ipiano è un cerchio Σ , gli Ipunti sono i punti interni di Σ , le Irette sono le corde aperte di Σ . E’ facile verificare la validità degli assiomi della geometria assoluta
- Per due punti passa una sola corda
- per un punto passano infinite code
- Non vale però il V° postulato (unicità della parallela)



•Si verificano anche il postulato di continuità , il postulato di Archimede e l’assioma di ordinamento

•Più complicato è il discorso sugli assiomi di congruenza : questi , infatti , chiamano in causa la nozione di metrica o distanza

•Se manteniamo nell’Ipiano la metrica euclidea ordinaria si creano dei problemi

•Le Irette , che debbono essere tutte uguali e infinite , avrebbero una misura finita e non maggiore del diametro di Σ

• Una traslazione di vettore il cui modulo fosse maggiore del diametro porterebbe sicuramente la figura traslata fuori dall’Ipiano

• Si tratta , quindi , di definire una diversa metrica , che salvaguardi il secondo postulato di Euclide (infinità della retta) e gli assiomi di congruenza

ASSIOMI DELLA DISTANZA

Dato uno spazio S , diciamo che su di esso è definita una distanza (o metrica) se $\forall\ (x,y)\in S\times S$ ad essa è associato in modo univoco un nunero reale $\rho(x,y)\geq 0$ che soddisfi le proprietà :

•$\rho(x,y)>0 \Leftrightarrow x\neq y$

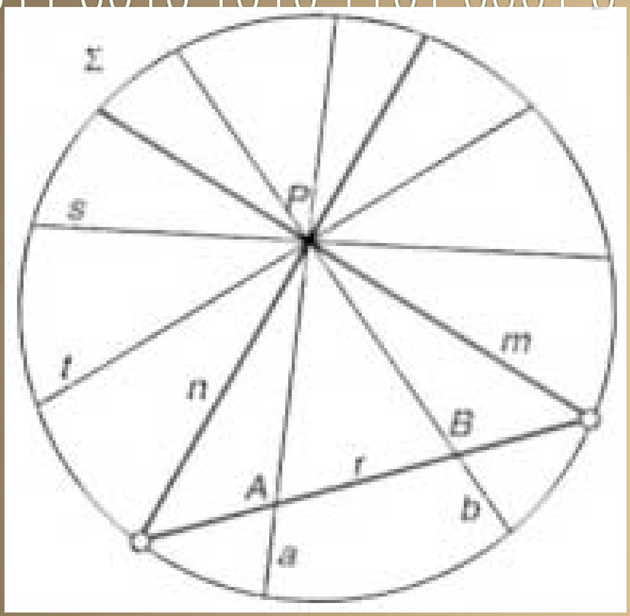
•$\rho(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$

•$\rho(x,y)=\rho(y,x)$

Siano *R* e *S* i punti verso cui tende la Iretta *r* , Klein definisce :

$$d\left(a,b\right)=\left|\ln\frac{\frac{AP}{AQ}}{\frac{BP}{BQ}}\right|$$

0011 0010 1010 1101 0001 0100



inoltre

$$\left(\frac{AP}{AQ}\cdot\frac{BQ}{BP}\right)\to 0, d\to +\infty$$

Tale definizione è una buona definizione perché soddisfa i tre assiomi della distanza, infatti d(a,b) èun numero reale positivo o nullo : *a,b)* se A=B e solo se A=Bd(a,b)=ln1=0 ; *c):*

$$d\left(a,b\right)=\left|\ln\frac{AP\cdot BQ}{AQ\cdot BP}\right|=\left|\ln\frac{BQ\cdot AP}{BP\cdot AQ}\right|=d\left(b,a\right)$$

LA GEOMETRIA SFERICA

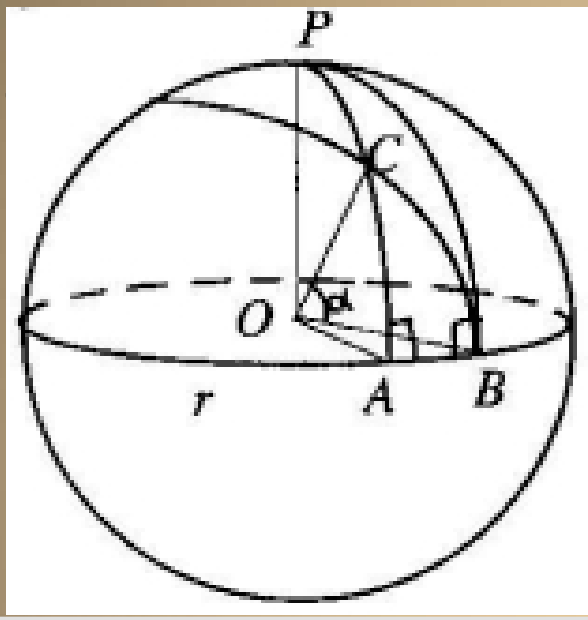
- Oltre alla geometria iperbolica esiste una geometria non euclidea in cui il piano ha curvatura positiva e che è fondata sull'*assioma di Riemann* che afferma che *"non esistono rette tra loro parallele ".*
- In questa geometria si dimostra che i triangoli hanno tutti somma degli angoli maggiore di π e l'eccesso e=s-π è proporzionale all'area del triangolo considerato
- In essa si dimostra la validità dell'ipotesi dell'angolo ottuso
- ***Questo pone un problema di grande rilievo : sia l'esistenza della parallela , sia il fatto ch e l'area di un triangolo è minore o uguale di π , non derivano dal V° postulato , ma sono acquisizioni interne alla geometria assoluta .***

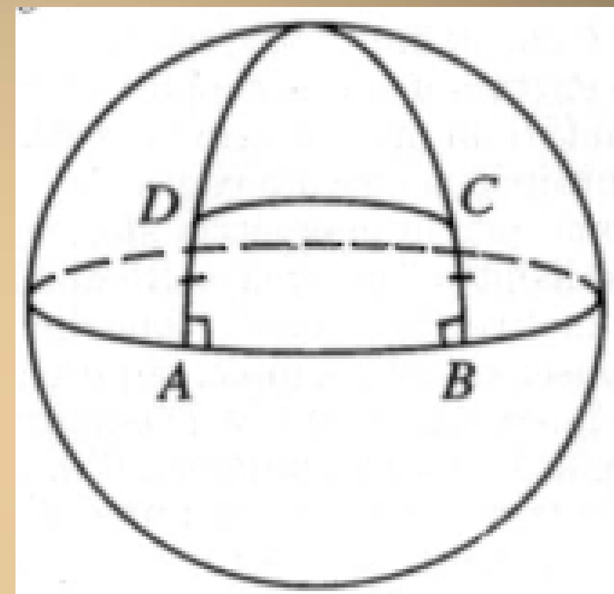
LA GEOMETRIA SFERICA

0011

- ***L'assioma di Riemann , quindi , deve essere incompatibile , oltre che col V° postulato anche con almeno uno degli altri assiomi euclidei : non è facile dire con quale .***
- Per rendere la trattazione più intuitiva assumiamo una superficie sferica come modello della geometria di Riemann : su di essa appaiono figurativamente e intuitivamente veri i teoremi acui abbiamo fatto cenno prima
- Tutto ciò deriva dal fatto che , come è facilmente dimostrabile , sulla superficie sferica la geodetica tra due punti *A* e *B* è data dall'arco di circonferenza massima passante per i due punti (questi sono , cioè , i segmenti di questo strano piano)

LA GEMETRIA SFERICA





Se i segmenti vengono identificati con gli archi di circonferenza massima , è naturale identificare le rette con le circonferenze massime stesse .

Risulta allora evidente quali sono gli assiomi euclidei che perdono validità :

a) La retta è una linea chiusa[quindi viene meno <u>l'assioma di infinità della retta</u> e uno degli assiomi di ordinamento : <u>dati tre punti su una retta ce n'è uno e uno Soltanto che sta tra gli altri due</u>]; *b)* <u>per due punti diametralmente opposti passano infinite rette , contro il II° postulato</u>

LA GEOMETRIA SFERICA

Alcuni teoremi della geometria sferica

1. Tutte le rette hanno la stessa lunghezza finita
2. Il piano ha area finita
3. Tutte le perpendicolari a una stessa retta si incontrano in un punto
4. L'area di un triangolo è proporzionale all'eccesso ($A = k\ e$)

Se vogliamo far valere (geometria ellittica) il II° postulato , assumiamo che , nel modello sferico , un punto è dato da due punti diametralmente opposti